УДК 514.822

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БРУННА-МИНКОВСКОГО ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

Б.С. Тимергалиев[1]

1 *timergalievbs@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Настоящая работа посвящена построению классов новых функционалов областей в евклидовом пространстве и доказательству для них неравенств типа Брунна-Минковского.

Ключевые слова: неравенство Брунна-Минковского, вогнутые функционалы, степенные моменты.

Классическое неравенство Брунна-Минковского имеет следующий вид:

$$|\Omega_0 + \Omega_1|^{1/n} \geq |\Omega_0|^{1/n} + |\Omega_1|^{1/n}, \tag{1}$$

где $|\Omega|$ – мера множества Ω, Ω_0, Ω_1 – выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0+\Omega_1 := \{z_0 + z_1 \in \mathbb{R}^n : z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$ — векторная сумма. В 1887 г. неравенство (1) было получено Брунном в случае $n = 3$. В 1910 г. Минковский указал Брунну на ошибку в доказательстве, которую тот исправил, а также придумал свое доказательство. И Брунн, и Минковский показали, что равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω_0 и Ω_1 являются равными с точностью до переноса и расширения. Долгое время считалось, что неравенство Брунна-Минковского относится только к геометрии, где его значение широко известно. Но в середине 20-го века Л.А. Люстерник [1] доказал, что неравенство (1) верно для произвольных ограниченных измеримых множеств Ω_0 и Ω_1, в этом случае его принято называть общим неравенством Брунна-Минковского. В 1954 году Х. Хадвигер и Охман [2] дали новое доказательство неравенства Брунна-Минковского. С тех пор неравенство начало свой путь в область анализа.

Последние 30-40 лет тематика, связанная с неравенством Брунна-Минковского, стремительно развивается. Неравенство широко используется в геометрическом анализе, математической физике и теории вероятностей. Литература по неравенствам типа Брунна-Минковского и основные результаты, появившиеся до 2006 г., содержатся в обзорных статьях [3], [4].

Наш интерес к этой тематике связан с результатами австралийского математика Г. Кэди [5], который в 2007 г. доказал неравенство типа Брунна-Минковского для функционала, введенного Ф.Г. Авхадиевым [6]. Развитие результата Г. Кэди, а также неравенства для новых типов функционалов были получены в работах [7-10]. Также предоставляется интересным обобщение результатов Х. Хадвигера [11], доказавшего в 1956 году неравенство типа Брунна-Минковского для двух моментов выпуклой области, а именно, момента относительно центра масс и момента относительно гиперплоскости. Приведем формулировку результата Х. Хадвигера [11].

Пусть Ω — ограниченная, выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. Через s обозначим центр масс области Ω. Определим функционал

$$J(\Omega)=\int\limits_{\Omega}\left(|z_1-s_1|^2+|z_2-s_2|^2+...+|z_n-s_n|^2\right)dz_1...dz_n,\ \ z\in\Omega,$$

где $z_1,z_2,...,z_n$ — декартовы координаты точки $z\in\Omega$, $s_1,s_2,...,s_n$– координаты центра масс Ω. Справедлива следующая

Теорема 1 (Хадвигер). *Пусть Ω_0,Ω_1 — ограниченные, выпуклые области в $\mathbb{R}^n$. Тогда для функционала $J(\Omega_t)^{\frac{1}{n+2}}$ справедливо неравенство:*

$$J(\Omega_t)^{\frac{1}{2+n}}\geq(1-t)J(\Omega_0)^{\frac{1}{2+n}}+tJ(\Omega_1)^{\frac{1}{2+n}}, \tag{1}$$

где $\Omega_t=\{(1-t)z_0+tz_1|z_0\in\Omega_0,z_1\in\Omega_1\},\ \ 0\leq t\leq 1.$

Целью данной работы является обобщение неравенства (1). Построим три класса функционалов, для которых справедливо неравенство типа Брунна-Минковского.

1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Определим функционал

$$I(k,\Omega)=\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1|x_1-s_1|^k+\alpha_2|x_2-s_2|^k+\cdots+\alpha_n|x_n-s_n|^k\right)dx,\ k\in(0,+\infty),$$

где $s_1,s_2,\ldots,s_n$– координаты точки минимума функции

$$I(y)=\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1|x_1-y_1|^k+\alpha_2|x_2-y_2|^k+\cdots+\alpha_n|x_n-y_n|^k\right)dx,\ dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$$

переменных $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$; $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — декартовы координаты точки $x\in\Omega$, $k\in(0,+\infty)$, $\alpha_i>0,\ (i=1,2,\ldots,n)$ — произвольные действительные числа.

При $k=2$ точка минимума $s=(s_1,\ldots,s_n)$ совпадает с центром масс области Ω и при $\alpha_j=1,\ (j=\overline{1,n})$ получаем функционал, рассмотренный Х. Хадвигером в [2]. При $k\neq 2$ точка минимума s функции $I(y)$, вообще говоря, не совпадает с центром масс области Ω.

Отметим, что точка минимума s принадлежит n-мерному параллелепипеду с ребрами $[\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}x_j,\ \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}x_j],\ j=\overline{1,n},\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, поэтому гиперплоскости $x_j=s_j,\ j=\overline{1,n}$ имеют с областью Ω непустое пересечение.

Теорема 2. *Пусть Ω_0,Ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда функционал $I(k,\Omega)^{1/(k+n)}$ вогнут:*

$$I(k,\Omega_t)^{1/(k+n)}\geq(1-t)I(k,\Omega_0)^{1/(k+n)}+tI(k,\Omega_1)^{1/(k+n)},$$

где $\Omega_t=\{(1-t)z_0+tz_1\mid z_0\in\Omega_0,z_1\in\Omega_1\},\ \ 0\leq t\leq 1,\ k\in(0,+\infty).$

2. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Определим функционал

$$W(k,\Omega)=\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1|x_1-s_1|^k+\alpha_2|x_2-s_2|^k+\cdots+\alpha_n|x_n-s_n|^k\right)^m dx,$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_n$– координаты точки минимума функции

$$W(y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - y_1|^k + \alpha_2|x_2 - y_2|^k + \cdots + \alpha_n|x_n - y_n|^k\right)^m dx, \; dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы координаты точки $x \in \Omega$; $k \in (0,\ 1]$ при $m \in (0,1) \cup (1,+\infty)$; $\alpha_j (j = \overline{1,n}) \in (0,\ +\infty)$ — произвольные действительные числа. Если $m = 1$, то $k \in (0,+\infty)$; в этом случае получаем функционал, рассмотренный в первой части работы.

Теорема 3. *Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда $I(k;m;\Omega)^{1/(km+n)}$ вогнут, т.е. имеет место неравенство*

$$W(k;m;\Omega_t)^{1/(km+n)} \geq (1-t)W(k;m;\Omega_0)^{1/(km+n)} + tW(k;m;\Omega_1)^{1/(km+n)},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (0,\ 1]$ при $m \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ и $k \in (0,+\infty)$ при $m = 1$.

3. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Определим функционал

$$H(k;m;k^0;\Omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - s_1|^k + \cdots + \alpha_n|x_n - s_n|^k\right)^m \prod_{j=1}^{n} |x_j - s_j|^{k_j} dx,$$

где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ — точка, доставляющая минимум функции

$$H(y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - y_1|^k + \ldots + \alpha_n|x_n - y_n|^k\right)^m \prod_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{k_j} dx,$$

переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы координаты точки $x \in \Omega$; $k,\ \alpha_j (j = \overline{1,n}) \in (0,+\infty)$, $m,\ k_j (j = \overline{1,n}) \in [0,+\infty)$, $m + |k^0| \neq 0$, $k^0 = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k^0| = k_1 + \cdots + k_n$.

Теорема 4. *Пусть Ω_0, Ω_1 — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда функционал $H(k;m;k^0;\Omega)^{1/(km+n+|k^0|)}$ вогнут, т.е. имеет место неравенство*

$$H(k;m;k^0;\Omega_t)^{1/(km+n+|k^0|)} \geq (1-t)H(k;m;k^0;\Omega_0)^{1/(km+n+|k^0|)} +$$

$$+tH(k;m;k^0;\Omega_1)^{1/(km+n+|k^0|)},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (0,1]$, $k^0 = (k_1, \ldots, k_n)$, $m,\ k_j (j = \overline{1,n}) \in [0,+\infty)$, $m + |k^0| \neq 0$.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Литература

1. Lusternik L. A. *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung fur beliebige messbare Mengen* // C. R. Acad. Sci. URSS. – 1935. – V. 8. – P. 55-58.

2. Hadwiger H., Ohmann D. *Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie* // Math. Z. – 1956. – V. 66. – P. 1-8.

3. Gardner R. J. *The Brunn-Minkowski inequality* // Bull. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 39. – P. 355-405.

4. Barthe F. *The Brunn-Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities* // Int. Congress of Math. – 2006 – V. 2. – P. 1529-1546.

5. Keady G. *On a Brunn-Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev* // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2007. – V. 8. – P. 1-10.

6. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. – 1998. – № 12. – С. 3-12.

7. Авхадиев Ф. Г., Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского для конформных и евклидовых моментов областей* // Изв. вуз. Матем. – 2014. – № 5. – С. 64-67.

8. Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для степенных моментов* // Уч. зап. Каз. ун-та. – 2016. – № 1. – С. 90-106.

9. Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для обобщенных степенных моментов* // Вестник ВолГУ. – 2016. – № 4. – С. 92-107.

10. Timergaliev B. S. *Generalization of the Brunn-Minkowski inequality in the form of Hadwiger for power moments* // Lobachevskii J. Math. – 2016 – V. 37. – № 6. – P. 794-806.

11. Hadwiger H. *Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente* // Comment Math. Helv. – 1956. – V. 30. – P. 285-296.

BRUNN-MINKOWSKI TYPE INEQUALITY FOR GENERALIZED POWER MOMENTS
WITH ADDITIONAL MULTIPLIERS

B.S. Timergaliev

In this paper we built classes of domain functionals in euclidian space and proved a Brunn-Minkowski type inequality applied to the mentioned classes.

Keywords: Brunn-Minkowski inequality, concave function, power moments.

УДК 517.518.85, 517.518.68

О ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

А.Ю. Трынин[1]

1 *tayu@rambler.ru*; Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

В статье обсуждается справедливость принципа локализации синк-аппроксимаций на отрезке на классе функций, интегрируемых по Риману.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, кардинальные функции, приближение, принцип локализации.